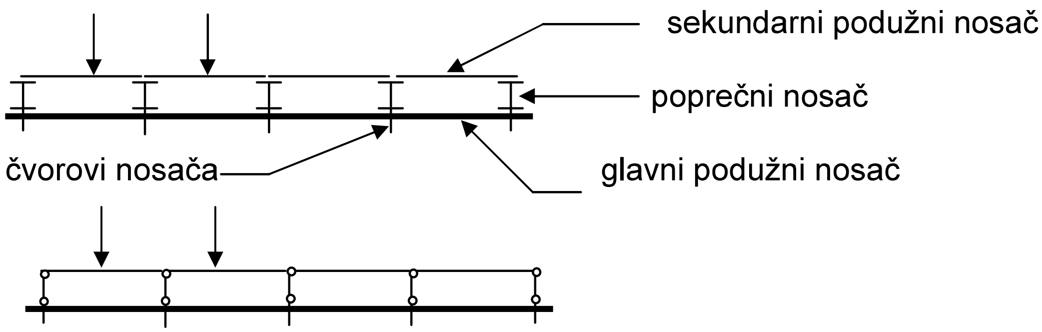
4. DIJAGRAMI UTICAJA I UTICAJNE LINIJE

4.1. Uticaji u nosačima. Stalno i pokretno opterećenje

Uticaji u nosaču su reakcije oslonaca, reaktivni momenti, sile u presjecima, pomjeranja i obrtanja poprečnih presjeka nosača. Zadatak određivanja uticaja u nosačima određen je sistemom linearnih diferencijalnih jednačina i stoga važi princip superpozicije uticaja.
Prema načinu nanošenja spoljašnje ili aktivne sile dijelimo na: raspodijeljene sile, i raspodijeljene momente, koncentrisane sile i koncentrisane momente.
Prema načinu prenošenja opterećenja na nosač razlikujemo neposredno i posredno optrećenje. Neposredno opterećen nosač prima opterećenje po cijeloj dužini, dok posredno opterećen nosač prima opterećenje u određenim tačkama kako je prikazano na sljedećoj slici.



Prema vremenu trajanja opterećenje dijelimo na: stalno opterećenje (sopstvena težina glavnih podužnih nosača i svih djelova konstrukcije koji se preko njega prenose) i povremeno opterećenje (snijeg, vetar, ljudska navala, uskladišteni materijal, vozila, i sl.)
Povremeno opterećenje koje mijenja svoj položaj na nosaču naziva se ***pokretno opterećenje***. Pokretno opterećenje može biti jednako podijeljeno i sistem vezanih koncentrisanih sila.

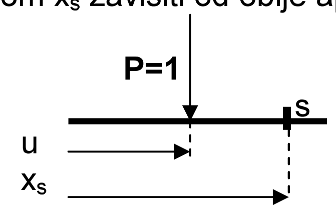
4.2. Ekstremne vrijednosti uticaja

Vrijednosti uticaja u nosačima, koje izazivaju stalna i povremena opterećenja, zavise samo od intenziteta opterećenja. Vrijednosti uticaja od pokretnog opterećenja zavisi ne samo od intenziteta uticaja već i od njegovog **POLOŽAJA** na nosaču.
Položaj opterećenja pri kome uticaj na posmatranom mjestu nosača ima ekstremnu vrijednost je *opasan ili mjerodavan položaj.* Znači da se opasan položaj mijenja sa promjenom položaja presjeka u kome tražimo uticaj, kao i sa promjenom vrste traženog uticaja.
Maksimalne i minimalne vrijednosti nekog uticaja usljed pokretnog opterećenja prikazujemo *dijagramima ekstremnih vrijednosti uticaja*.
Između *dijagrama uticaja* i *dijagrama ekstremnih uticaja* postoji suštinska razlika. Ordinate dijagrama uticaja pokazuju vrijednosti uticaja u svim presjecima za jedan

jedini položaj opterećenja. *Ordinate dijagrama ekstremnih vrijednosti uticaja pokazuju promjenu u svim poprečnim presjecima pri čemu svakoj ordinati popravilu odgovara novi položaj opterećenja.*
Najveći od ekstremnih uticaja u pojedinim poprečnim presjecima, odnosno brojno najveći uticaj u nosaču nazivamo *apsolutni maksimum* ili *apsolutni minimum* tog uticaja. Često je za dimenzionisanje nosača potrebno da se odredi samo apsolutni maksimum ili minimum pojedinih uticaja.

4.3. Pojam uticajne funkcije i uticajne linije

Uticaje u nosačima usljed dejstva pokretnog opterećenja određujemo preko ***uticajnih linija***. Ako jedinična koncentrisan sila djeluje u tački sa apcisom u, tada će uticaj u presjeku sa apcisom x_s zavisiti od obije apcise $Z_s=Z_s(x_s, u)$:



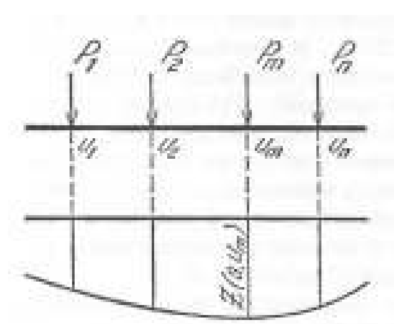
Kada je:
u=const tada funkcija Z predstavlja dijagram uticaja Z, usljed P=1 u tački sa apcisom u;
x_s=const tada funkcija Z predstavlja uticajnu funkciju za uticaj Z u presjeku sa apcisom x_s.
Grafički prikaz uticajne funkcije je **uticajna linija** za uticaj Z u presjeku x_s koja ima ordinate koje se nanose na mjesto dejstva sile, odnosno, u presjeku sa apcisom u.
Uticajne linije su krive ili prave linije, njihov oblik zavisi od vrste nosača, vrste uticaja u nosaču kao i načina prenošenja opterećenja na nosač, posrednog ili neposrednog.

4.4. Računanje vrijednosti uticaja iz uticajne linije

4.4.1. Sistem koncentrisanih sila

Na osnovu principa superpozicije uticaja Z_s, u presjeku sa apcisom x_s, usljed dejstva sistema koncentrisanih sila P_1, P_2, ...,P_n, u presjecima sa apcisama u_1, u_2, ..., u_n (slika 1) vrijednost uticaja određena je izrazom:

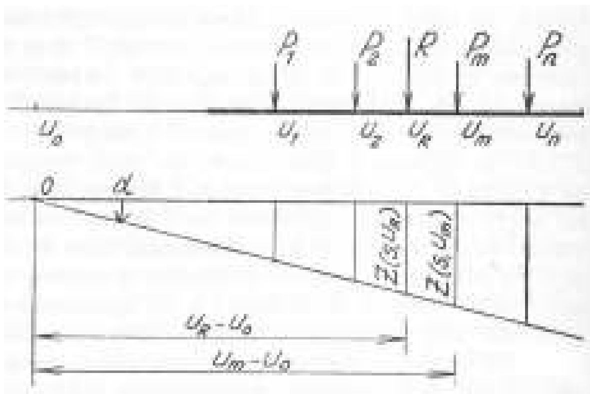
$$Z_s = \sum_{m=1}^{n} P_m Z_s(x_s, u_m) \tag{12}$$



Slika 1.

Kada je uticajna linija prava na onom dijelu na kome djeluje sistem koncentrisanih sila (slika 2), tada izraz (12) postaje:

$$Z_s = \mathrm{tg}\alpha \sum_{m=1}^{n} P_m \left(u_m - u_o\right) \tag{13}$$



Slika 2.

Statički momenat sila P_1, P_2, ...,P_n se može zamijeniti sa statičkim momentom rezultante R u odnosu na istu tačku, nakon čega se dobija:

$$\sum_{m=1}^{n} P_m \left(u_m - u_o\right) = R\left(u_R - u_o\right)$$

gdje je sa R obelježena rezultanta sila $R = \sum_{m=1}^{n} P_m$.

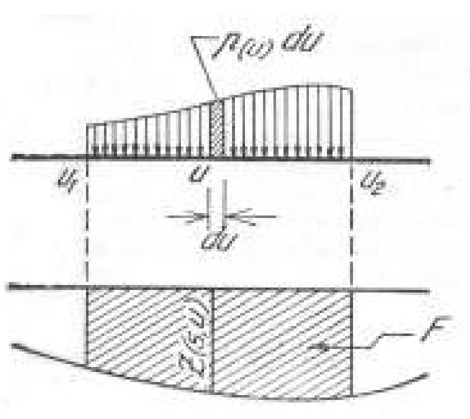
Vrijednost traženog uticaja određujemo proizvodom rezultante i ordinate uticajne linije ispod rezultante:

$$Z_s = R\left(u_R - u_o\right)\mathrm{tg}\alpha = RZ\left(x_s, u_R\right) \tag{14}$$

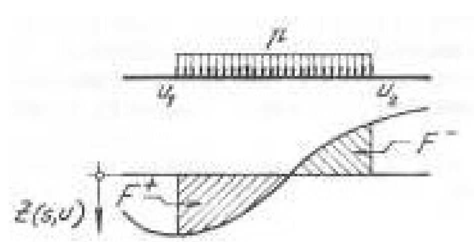
4.4.2. Raspodijeljeno opterećenje

Ako uvedemo pojam elementarne koncentrisane sile p(u)du, primjenom izraza (12) možemo napisati da je:

$$Z_s = \int_{u_1}^{u_2} p(u) Z\left(x_s, u\right) du \tag{15}$$



Slika 3.



Slika 4.

Kada je opterećenje jednako podijeljeno intenziteta p(u)=p=const (slika 4) tada je:

$$Z_s = p\int_{u_1}^{u_2} Z(x_s, u)du = pF \qquad (16)$$

gdje je sa F označena uticajna površina ispod opterećenja. Ako uticajna površina na tom dijelu mijenja znak tada površinu treba uzeti u algebarskom smislu: $F=F^{+}+F^{-}$.
Kada je opterećeni dio uticajne površi ograničen pravom linijom koja apcisnu osu sječe u tački 0 (slika 5.), tada se ordinate uticajne linije mogu sračunati izrazom:

$$Z_s(x_s, u\ ) = (u - u_o)\mathrm{tg}\alpha$$

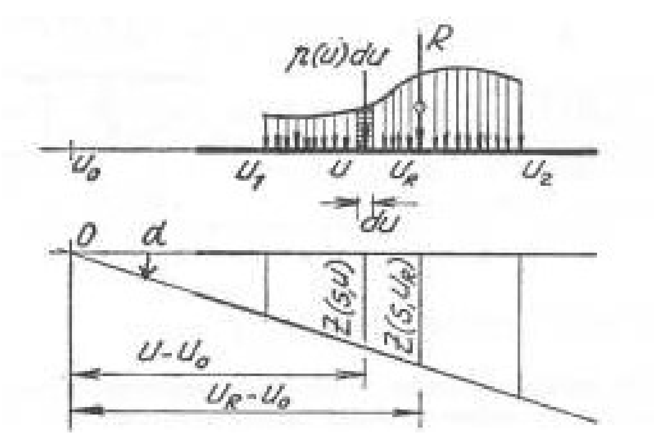
$$Z_s = \mathrm{tg}\alpha \int_{u_1}^{u_2} p(u)(u - u_o)du$$

Integral na desnoj starni predstavlja statički momenat elementarnih sila p(u)du u odnosu na presjek sa apcisom u_o, i možemo ga odrediti preko statičkog momenta rezultante $R(u_R-u_o)$ u odnosu na isti presjek:

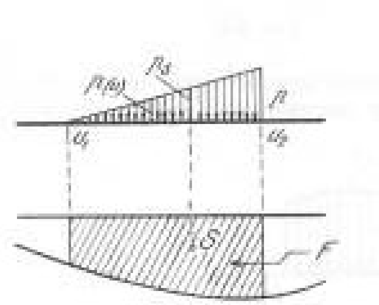
$$Z_s = R(u_R - u_o)\mathrm{tg}\alpha = RZ\,(z_s, u_R)$$

gdje je je: $$R = \int_{u_1}^{u_2} p(u)du$$

$Z(x_s,\ u_R)$- ordinata uticajne linije ispod rezultante, odnosno, ispod težišta dijagrama opterećenja



Slika 5.



Slika 6.

Ako se opterećenje p(u) linearno mijenja (slika 6.), tada se integralom određuje brojna vrijednost opterećenog dijela uticajne površine:

$$F = \int_{u_1}^{u_2} Z(x_s, u\ )du$$

i tako dobijamo:

$$Z_s = \frac{p}{u_2 - u_1}\int_{u_1}^{u_2} Z(x_s, u\ )(u_2 - u_1)du = \frac{p}{u_2 - u_1}u_s F = p_s F \qquad (17)$$

4.4.3. Koncentrisani momenat

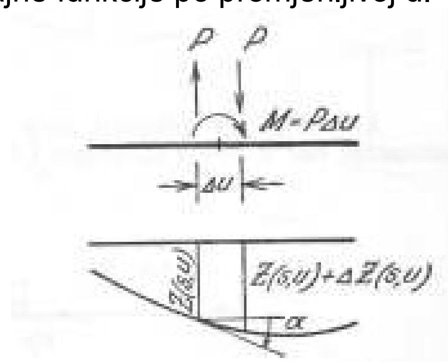
Ako koncentrisani momenat u presjeku u zamijenimo ekvivalentnim spregom sila P koje djeluju na razmaku Δu tako da važi izraz $M=P\Delta u$ (slika 7.), tada možemo, u skladu sa relacijom (12), napisati da je:

$$P\left|Z(x_s,u)+\Delta Z(x_s,u)-Z(x_s,u)\right|=P\Delta Z(x_s,u)=M\frac{\Delta Z(x_s,u)}{\Delta u}$$

Kada razmak $\Delta u \to 0$, tada:

$$Z_s = M\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta Z(x_s,u)}{\Delta u}=MZ'(x_s,u)=Mtg\alpha \tag{18}$$

gdje je $Z'(x_s,u)$ izvod uticajne funkcije po promjenljivoj u.



Slika 7.

4.5. Određivanje mjerodavnog položaja i proračun ekstremnih vrijednosti uticaja

4.5.1. Jednako podijeljeno pokretno opterećenje

Jednako podijeljeno pokretno opterećenje može da bude proizvoljne dužine rasprostiranja, može se prekidati na proizvoljnom mjestu, i određene dužine rasprostiranja koja se ne može prekidati

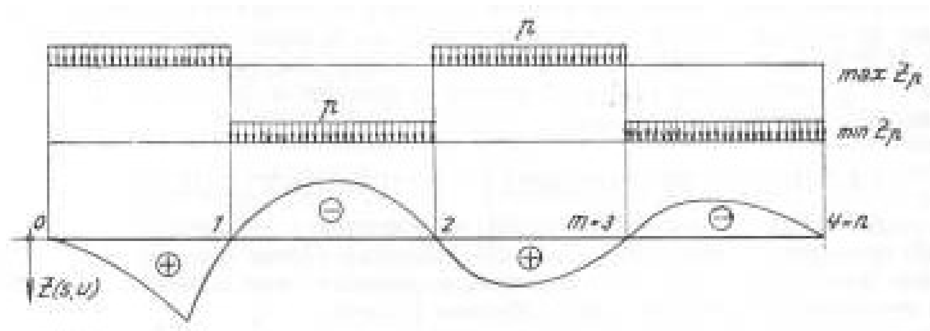
Uvešćemo pojam *razdjelnice* uticajne linije. To su tačke koje dijele pozitivne i negativne djelove uticajne linije, odnosno, tačke u kojima uticajna linija mijenja znak.

Kada je podijeljeno pokretno opterećenje proizvoljne dužine a uticajna linija ima više razdjelnica (slika 8.), tada se mjerodavan položaj određuje postavljanjem opterećenja iznad onih djelova uticajnih površi koje imaju isti znak. Ako razdjelnice obilježimo sa m=0,1,2,...,n, a uticajnu površ m-tog polja sa F_m, tada su ekstremne vrijednosti uticaja određene izrazima:

$$F_m = \int_{m-1}^{m} Z(x_s,u)du$$

$$_{max}Z_{s,p} = pF^+ \tag{19}$$

$$_{min}Z_{s,p} = pF^-$$



Slika 8.

F^+ - pozitivna površina uticajne linije, F^- - negativna površina uticajne linije
$F^+=F_1+F_3$ $F^-=F_2+F_4$ $\Sigma F=F^+ + F^- = F_1+F_3+F_2+F_4$
Uticaj jednako podijeljenog stalnog opterećenja intenziteta g sračunava se na sljedeći način:

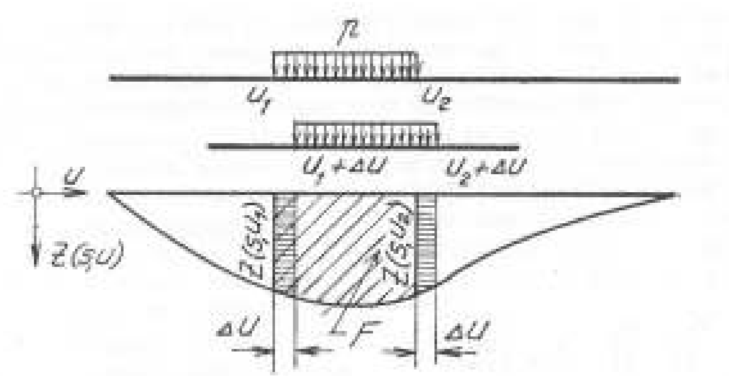
$Z_{s,g} = g\ \Sigma F = g\ F^+ + g\ F^-$

Kada je jednako podijeljeno pokretno opterećenje određene dužine i to takve dužine koja je manja od razmaka susjednih nultih tačaka uticajne linije(slika 9.), mjerodavan položaj odredićemo na sljedeći način. Ako je položaj opterećenja dat na slici mjerodavan položaj, odnosno, ako za taj položaj Z_s=p F ima ekstremnu vrijednost, pri pomjeranju opterećenja u lijevo ili desno za veličinu Δu, priraštaj uticaja ΔZ_s mora da bude jednak nuli:

$\Delta Z_s = p\ \Delta u\ [Z(x_s, u_2) - Z(x_s, u_1)] = 0$

Iz ove relacije slijedi kriterijum za mjerodavan položaj koji se piše u sljedećem obliku:

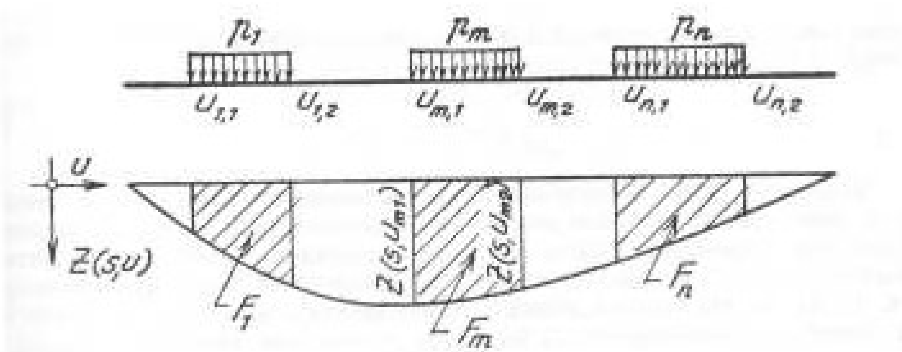
$Z(x_s, u_2) = Z(x_s, u_1)$ (20)



Slika 9.

Kada je jednako podijeljeno pokretno opterećenje konačne dužine u opasnom položaju mora da bude ispunjen uslov jednakosti ordinata uticajne linije na krajevima opterećenja.
Moguće je da postoji veći broj položaja koji zadovoljavaju ovaj uslov. U takvim slučajevima ekstremnu vrijednost uticaja nalazimo upoređenjem vrijednosti uticaja za sve položaje pokretnog opterećenja koji zadovoljavaju uslov (20).
Kada se pokretno opterećenje sastoji od niza jednako podijeljenih opterećenja proizvoljnih intenziteta a konačnih dužina na razmacima koji se tokom vremena ne mijenjaju (slika 10.), mjerodavan položaj dobijamo u obliku:

$$\sum_{m=1}^{n} p_m Z(x_s, u_{m1}) = \sum_{m=1}^{n} p_m Z(x_s, u_{m2})$$



Slika 10.

4.5.2. Pokretan sistem vezanih koncentrisanih sila

Mjerodavan položaj pokretnog sistema vezanih koncentrisanih sila je nešto teže odrediti. Kada je uticajna linija kriva linija ili poligon sa više strana, tada ekstremne vrijednosti određujemo probanjem. Sile nanosimo na traku papira po redu kako su date u šemi opterećenja nanoseći razmake sila u razmjeri u kojoj su nanijete apcise na crtežu uticajne linije. Postavljanjem tako nanijetih sila nad pozitivnan, odnosno, negativan dio uticajne linije u položaj koji očekujemo da bude mjerodavan, odmjeravamo ordinate uticajne linije ispod sila i na osnovu izraza (12) sračunavamo vrijednost uticaja. Postupak ponovimo za izvjestan broj položaja sistema sila, i dobijamo mjerodavan položaj sila koji daje ekstremnu vrijednost uticaja. Redovno je to položaj pri kome najveće sile dolaze nad najveće ordinate uticajne linije. Ovaj postupak je dug i neprecizan, stoga ćemo ga skratiti koristeći kriterijume koji moraju biti zadovoljeni pri opasnom položaju sistema sila.
Ako je data uticajna linija i pokretan sistem sila kao na slici 11., za koji kažemo da je mjerodavan položaj, tada:

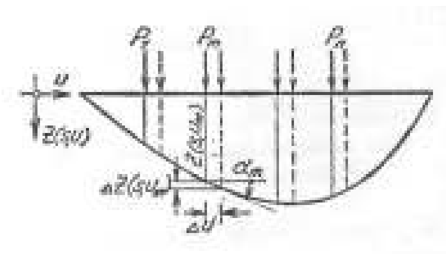
$$Z_s = \sum_{m=1}^{n} P_m Z_s(x_s, u_m)$$

ima ekstremnu vrijednost ako, pri pomjeranju sistema sila ulijevo ili udesno za veličinu Δu, prirast uticaja ΔZ_s ima vrijednost nula:

$$\Delta Z_s = \sum_{m=1}^{n} P_m \Delta Z(x_s, u_m) = \Delta u \sum_{m=1}^{n} P_m \operatorname{tg}\alpha_m = 0$$

Slijedi da, kada je sistem sila u mjerodavnom položaju, mora biti ispunjen uslov:

$$\sum_{m=1}^{n} P_m \operatorname{tg}\alpha_m = 0 \qquad (21)$$



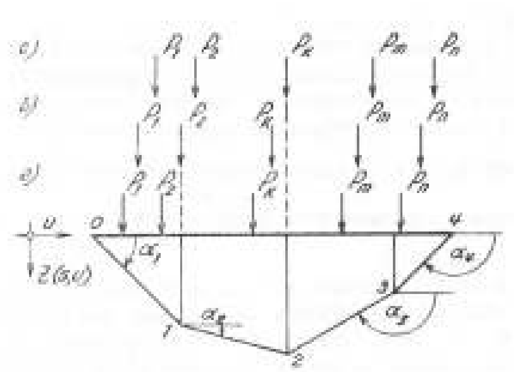
Slika 11.

Jednačina (21) predstavlja analitički kriterijum koji moraju zadovoljiti sile da bi posmatrani položaj bio mjerodan. Moguće je da postoji više položaja koji zadovoljavaju analitički kriterijum, tj da postoje više maksimuma i minimuma. Ekstremnu vrijednost uticaja Z_s dobijamo upoređujući vrijednosti uticaja za sve položaje sistema sila koji zadovoljavaju kriterijum (21).
Ovaj kriterijum važi i kada je uticajna linija poligonalna linija. Razlika je u tome što je izvod funkcije:

$$\frac{\Delta Z}{\Delta u} = \sum_{m=1}^{n} P_m \operatorname{tg}\alpha_m$$

kada je uticajna linija kriva linija, neprekidna funkcija, a kada je uticajna linija poligonalnog oblika, izvod funkcije se mijenja u skokovima.

Ako je dat položaj a), slika 12., za dati sistem pokretnih sila $P_1,.., P_n$ na poligonalnoj uticajnoj liniji, zbir proizvoda je $\sum_{m=1}^{n} P_m \operatorname{tg}\alpha_m > 0$. Pri pomjeranju sistema sila za Δu prirast funkcije ΔZ je:



$$\Delta Z = \Delta u \sum_{m=1}^{n} P_m \operatorname{tg}\alpha_m \qquad (22)$$

Slika 12.

Kada se sistem sila pomjera u smjeru u kojem raste u, s lijeva na desno, tada je $\Delta u>0$ pa je i $\Delta Z>0$, pa funkcija Z raste. Kada se sistem sila pomjera u smjeru u kojem u opada, s desna na lijevo, tada je $\Delta u<0$ pa je i $\Delta Z<0$, pa funkcija Z opada. Zaključuje se da sistem sila treba pomjerati na desno da bi dobili ekstremnu vijednost.

Pri ovom pomjeranju sistema sila vrijednost zbira $\sum_{m=1}^{n} P_m \operatorname{tg}\alpha_m$ se ne mijenja sve dok, ili neka nova sila ne naiđe na uticajnu liniju, ili neka sila ne siđe sa uticajne linije, ili neka od sila koja se nalazi nad uticajnom linijom prelaskom preko tjemena poligonalne uticajne linije ne pređe na dio čiji je ugao nagiba drugi. Nailaskom, odnosno, silaskom sila sa uticajne linije vrijednost zbira se mijenja ali ostaje pozitivna. Prelaskom neke sile preko tjemena, sa jednog dijela uticajne linije na drugi dio, na primjer sile P_2 u položaj b), vrijednost $\sum_{m=1}^{n} P_m \operatorname{tg}\alpha_m$ se mijenja u skoku. Pri tome se zbir smanjuje jer sila prelazi sa dijela uticajne linije sa algebarski većim tangensom ugla na dio sa manjim tangensom ugla. Ako je vrijednost $\sum_{m=1}^{n} P_m \operatorname{tg}\alpha_m$ još uvijek pozitivna sistem sila treba i dalje pomjerati u desno dok još neka sila ne pređe preko tjemena uticajne linije. Razumljivo da vrijednost ove sume koja se mijenja neće biti jednaka nuli osim u izuzetnim slučajevima, međutim, sigurno je da će pri prelasku neke sile preko nekog od tjemena uticajne linije, vrijednost sume promijeniti znak, odnosno postati negativna. Kada se ta sila nalazi nad tim tjemenom uticaj Z_s ima ekstremnu vrijednost jer:

$$\rightarrow \qquad \Delta u>0 \qquad \sum_{m=1}^{n} P_m \operatorname{tg}\alpha_m < 0$$

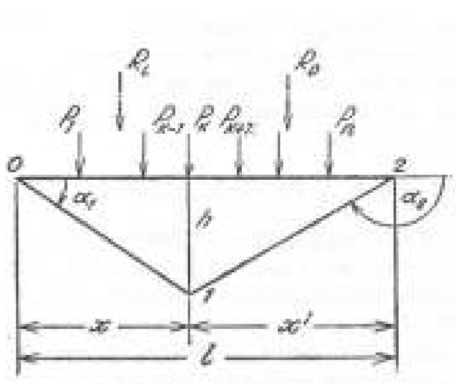
$$\leftarrow \qquad \Delta u<0 \qquad \sum_{m=1}^{n} P_m \operatorname{tg}\alpha_m > 0$$

U oba slučaja prirast funkcije je negativan, što znači da u posmatranom položaju funkcija ima ekstremnu vrijednost.

Da bi se pokretan sistem sila našao u opasnom položaju jedna od sila mora da se nalazi nad jednim od tjemena uticajne linije i ta sila je ***mjerodavna sila ili kritična sila***, a vrijednost $\sum_{m=1}^{n} P_m \operatorname{tg}\alpha_m$ pri pomjeranju sistema sila lijevo ili desno od tog položaja mora imati različit znak.

Opasnu ili mjerodavnu silu označićemo sa P_k. Ovu silu razdvojićemo na dvije komponente P_k^l i P_k^d koje djeluju beskonačno blisko pored tjemena i imaju takve intenzitete da je uslov (21) identički zadovoljen.

Kriterijum za opasan položaj sistema sila možemo primijeniti na trougaonoj uticajnoj liniji. Sile P_m složimo u rezultante R_L i R_D i tada je uslov:



Slika 13.

$R_L \, tg\alpha_1 + R_D \, tg\alpha_2 = 0$

Sa slike se vidi da je $tg\alpha_1 = h/x$, i $tg\alpha_2 = -h/x'$, to je:

$$R_L \frac{h}{x} - R_D \frac{h}{x'} = 0 \qquad\qquad R_L \frac{h}{x} = R_D \frac{h}{x'}$$

Prosječno opterećenje lijevog dijela jednako je prosječnom opterećenju desnog dijela uticajne linije.
Možemo napisati da je:

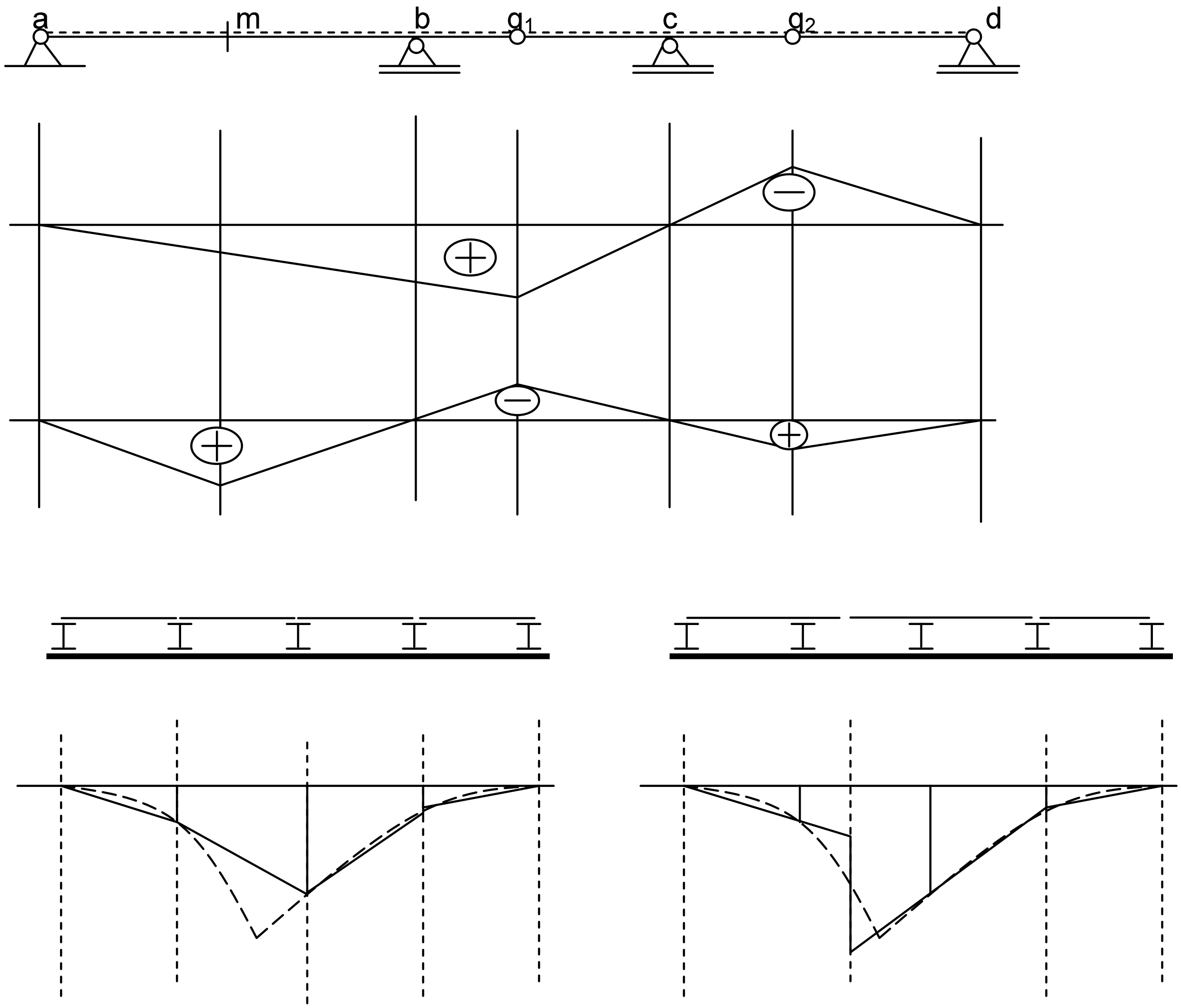
$$R_L \frac{h}{x} = R_D \frac{h}{x'} = \frac{R_L + R_D}{x + x'} = \frac{R}{l} \qquad \text{gdje je} \quad R = \sum_{m=1}^{n} P_m$$

Da bi pokretan sistem vezanih koncentrisanih sila na trougaonoj uticajnoj liniji bio u opasnom položaju potrebno je da prosječna opretećenja lijevog i desnog dijela uticajne linije budu međusobom jednaka i jednaka sa ukupnim prosječnim opterećenjem.
Analitički kriterijum za mjerodavan položaj, bez sile Pk, može se napisati i u sljedećem obliku:

$$\frac{R}{l} > \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{x} \sum\limits_{m=1}^{k-1} P_m \\ \dfrac{1}{x'} \sum\limits_{m=k+1}^{n} P_m \end{Bmatrix}$$

4.6. Konstrukcija uticajnih linija za reakcije i sile u presjecima primjenom statičke metode

Oblik uticajne linije zavisi od vrste nosača, vrste uticaja i položaja presjeka(slika 14.).
Ordinate uticajne linije mogu se računati iz uslova ravnoteže krutih ploča.
Uticajna linija za reakciju oslonca ili reaktivni moment uklještenja statički određenog nosača je linearna funkcija položaja sile P=1, duž svake krute ploče po kojoj se sila kreće.
Uticajna linija za statičke uticaje statički određenog nosača su prave linije duž svake krute ploče po kojoj se kreće jedinična sila.



Slika 14.